

EL MODELO DE MERCADO (MODELO DE ÍNDICE ÚNICO, O MODELO DE UN SOLO FACTOR).

Disponemos de las tasas de rendimiento de un conjunto de n activos con riesgo ($i = 1, 2, \dots, n$) y disponemos también de la tasa de rendimiento de un índice de mercado ampliamente diversificado, como podría ser el Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV.

Para cada activo i se corre una regresión lineal entre los rendimientos del activo y los del índice de mercado. Esto es:

$$r_{iI} = \alpha_{iI} + \beta_{iI} r_I + \varepsilon_{iI} \quad (1)$$

r_{iI} = Tasa de rendimiento del activo i .

α_{iI} = Componente del rendimiento del activo que es independiente del desempeño del mercado.

β_{iI} = Una constante que mide la sensibilidad del rendimiento en el activo I respecto a los cambios en el rendimiento del mercado.

r_I = Tasa de rendimiento del índice de mercado.

ε_{iI} = Es el término de error aleatorio. Se supone que tiene una distribución normal con media cero, varianzas $\sigma_{\varepsilon iI}^2$ y no están correlacionados entre sí.

La varianzas del rendimiento del activo i es:

$$\sigma_i^2 = \beta_{iI}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon iI}^2 \quad (2)$$

Si armamos un portafolio de n activos, entonces tendremos para el portafolio los siguientes resultados:

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad (3)$$

Sustituyendo (1) en (3):

$$\begin{aligned}
 r_p &= \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_{iI} + \beta_{iI} r_I + \varepsilon_{iI}) \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i \alpha_{iI} + \left(\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iI} \right) r_I + \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{iI} \\
 &= \alpha_{pI} + \beta_{pI} r_I + \varepsilon_{pI}
 \end{aligned} \tag{4.a}$$

La varianza del rendimiento del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = \beta_{pI}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 \tag{5}$$

Siendo:

$$\beta_{pI}^2 = \left[\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iI} \right]^2 \tag{6}$$

Suponiendo que los componentes del error aleatorio no están correlacionados entre sí:

$$\sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{7}$$

Si consideramos un portafolio en el que los n activos tienen la misma ponderación dentro del total, tendremos que (6) puede escribirse:

$$\beta_{pI}^2 = \left[\frac{1}{n} \beta_{iI} \right]^2 \tag{8}$$

De manera que la expresión encerrada en el paréntesis es el promedio de las betas de los activos que componen el portafolio. Si agregamos más activos, el promedio no se reduce sistemáticamente, también puede aumentar. Es decir, la diversificación ingenua no reduce este componente de la varianza del portafolio. Es la parte no diversificable del riesgo. Es el **riesgo sistémico o de mercado**.

Por el contrario, la diversificación ingenua aplicada en (7) resulta:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon_p}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_{\varepsilon_i}^2 \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{\sigma_{\varepsilon_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2 + \dots + \sigma_{\varepsilon_n}^2}{n} \right]\end{aligned}\quad (9)$$

Esta parte de la varianza del portafolio sí puede reducirse mediante la diversificación (aumento de activos en el portafolio). Esta es la parte diversificable del riesgo del portafolio. Es el **riesgo único o específico**.

EJERCICIO DE APLICACIÓN

Este modelo fue ideado por W. Sharpe con el objetivo de simplificar los cálculos que son necesarios para operar con el modelo original de Markowitz. Este modelo requiere de una matriz de varianzas y covarianzas de todos los activos que forman un portafolio. En los primeros años de la década de los sesenta del siglo XXI era todavía extremadamente difícil poder construir la matriz de varianzas y covarianzas con datos históricos. El modelo de mercado es más económico en cuanto a los insumos de información necesarios.

Vamos a hacer un ejercicio de cálculo de un portafolio de 2 activos y luego de 3 activos usando el modelo de mercado y con información de rendimientos de empresas mexicanas listadas en la BMV y también del rendimiento del IPyC al cual consideramos el índice de mercado.

Se recopiló información sobre tasas de rendimiento semanales desde el 16/01/2009 hasta el 3/02/2012 de las acciones de las empresas ARCA, ALFA y AMÉRICA MOVIL así como del IPyC. Con esta información se construye:

- a. Una regresión lineal entre los rendimientos de cada una de las empresas contra los rendimientos del índice de mercado. Los resultados fueron:

Para ARCA

$$r_{ARCA} = 0.00649927 + 0.41937 r_I \quad R^2 = 0.1647$$

$$\sigma_{\varepsilon_{arca}}^2 = 8.5615$$

Para ALFA

$$r_{ALFA} = 0.00764377 + 1.272446 r_I \quad R^2 = 0.4873$$

$$\sigma_{\varepsilon_{alfa}}^2 = 16.3216$$

Para AMX

$$r_{AMX} = -0.00035574 + 0.9023 r_I \quad R^2 = 0.6480$$

$$\sigma_{\varepsilon_{amx}}^2 = 4.2436$$

- b. Una matriz de varianzas – covarianzas y de coeficientes de correlación correspondiente a las cuatro variables.

	<i>ARCA</i>	<i>ALFA</i>	<i>AMX</i>	<i>IPYC</i>
<i>ARCA</i>	10.1859			
<i>ALFA</i>	3.7451	31.6916		
<i>AMX</i>	3.6898	9.1875	11.9832	
<i>IPYC</i>	4.0003	12.1377	8.6070	9.5388

	<i>ARCA</i>	<i>ALFA</i>	<i>AMX</i>	<i>IPYC</i>
<i>ARCA</i>	1			
<i>ALFA</i>	0.20844308	1		
<i>AMX</i>	0.33397989	0.47145581	1	
<i>IPYC</i>	0.40583142	0.69809645	0.80503763	1

Con esta información vamos a calcular la varianza de un portafolio construido en partes iguales con ARCA y ALFA, siguiendo el modelo de mercado. La varianza del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = \beta_{pI}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

De esta ecuación conocemos $\sigma_I^2 = 9.5388$ de manera que $\sigma_I = 3.0885\% = 0.03885$

Sabemos que $\beta_{pI}^2 = [0.5 (0.41937) + 0.5 (1.27446)]^2 = 0.7173$

El término $\sigma_{\varepsilon p}^2 = 0.5^2 8.5615 + 0.5^2 16.3216 = 12.4416$

Por lo tanto, la varianza del portafolio por partes iguales de ARCA y ALFA es:

$$\sigma_p^2 = 0.7173 (9.5388) + 12.4416 = 19.2838$$

$$\sigma_p = 4.39\% = 0.0439$$

Ahora vamos a calcular la varianza del portafolio con la fórmula conocida.

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_{11} + w_2^2 \sigma_{22} + 2w_1 w_2 \sigma_{12}$$

$$\sigma_p^2 = 0.5^2 (10.1859) + 0.5^2 (31.6916) + 2(0.5)(0.5) (3.7451) = 12.3419$$

$$\sigma_p = \sqrt{12.3419} = 3.51\% = 0.0351$$

Si hacemos un portafolio con los 3 activos en partes iguales, la varianza y desviación estándar del portafolio, según el modelo de mercado será:

$$\beta_{pI}^2 = [(1/3) (0.41937) + (1/3) (1.27446) + (1/3) (0.9023)]^2 = 0.7489$$

$$\sigma_{\varepsilon p}^2 = (1/3)^2 8.5615 + (1/3)^2 16.3216 + (1/3)^2 4.2436 = 3.2363$$

La varianza y desviación estándar del portafolio de 3 activos es:

$$\sigma_p^2 = 0.7489 (9.5388) + 3.2363 = 10.38$$

$$\sigma_p = 3.2218\% = 0.032218$$

Si ahora calculamos la varianza con el método de varianzas y covarianzas tenemos:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_{11} + w_2^2 \sigma_{22} + w_3^2 \sigma_{33} + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_{13} + 2w_2 w_3 \sigma_{23}$$

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 10.1859 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 31.6916 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 11.9832 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 3.7451 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 3.6898 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 9.1875 = 9.6784$$

Y la desviación estándar es:

$$\sigma_p = 3.111 \% = 0.0311$$

CONCLUSIONES: 1) Cuando aumentamos un activo en el portafolio (aumentamos la diversificación) la varianza se reduce, 2) El cálculo indirecto con el modelo de mercado resulta en este caso una razonable aproximación.

Bibliografía: Alexander, Sharpe y Bailey, Fundamentos de Inversiones, Teoría y práctica, Tercera Edición, Prentice Hall, 2003.